

Общие представления о методе проектирования сложных систем

Структура:

1. Наш главный герой — тензор.
2. Габриэль Крон.
3. Краткая справка.
4. Несколько положений, без которых сознательное освоение работ Крона невозможно.
5. Основная идея Крона.
6. Суть метода.
7. Первый обобщающий постулат.
8. Второй обобщающий постулат.
9. Чем отличаются тензоры Г.Крона от обычных тензоров?

1. Наш главный герой — тензор

Можно уточнить время его рождения: в математике он родился более ста лет назад, но пришел на работу в синем комбинезоне инженера — в 1934 г. Именно тогда и была написана Г. Кроном довольно большая статья с несколько странным названием: «Нериманова динамика электрических вращающихся машин». Это и было настоящим рождением нашего героя. Его детство было трудным: для инженеров он казался «белоручкой», который пришел в цех из замка теоретической физики, а для физиков и математиков он казался чем-то вроде мусорщика, который возит отходы из замка математической физики. Однако ребенок рос и мужал.

Когда ему исполнилось 20 лет, японская ассоциация прикладной геометрии признала его главным инженером-математиком для всех профессий. В 1959 году, когда была написана «Диакоптика» — 25-летний тензор в синем комбинезоне мог претендовать на звание системотехника или «инженера по проектированию сложных систем».

Одной из наиболее удивительных особенностей нашего героя является то, что он живет не на бумаге. Он является сущностью любой системы реального мира и сохраняется, несмотря на происходящие изменения в этой системе.

Эта особенность нашего героя чрезвычайно актуальна сегодня, когда выход из кризиса и стремление к устойчивому развитию требует изменения многих структур в условиях изменяющихся процессов в системе «природа — общество — человек». В таких условиях **необходим метод проектирования изменений при изменении структуры системы.**

Более того, нужен не просто метод, а такой, который дает возможность рассчитать проектные решения, согласованные с законами сохранения и изменения системы.

По утверждению профессора А. Е. Петрова, **«на сегодня не существует математических теорий и методов расчета изменений процессов при изменении структур».**

«Существуют методы расчета процессов в сложных системах при заданных соединениях элементов. При изменении связей уравнения процессов получают и решают заново. Структуру связи элементов в системе рассматривают в теории графов, комбинаторной топологии, которые не имеют меры расстояния между циклами, разрезами, симплексами.

При изменении структуры меняется число переменных, получить новые уравнения по старым невозможно, как и преобразовать старое решение в новое, поскольку матрицы таких преобразований не имеют обратных и не образуют группу. Это не позволяет определить изменения процессов при изменении структуры».

Тензорный метод Г. Крона обеспечивает расчет изменения процессов при изменении структуры сложных систем.

Что же Г. Крону удалось сделать?

2. Габриэль Крон (1901—1968 гг.)



Габриэль Крон родился 23 июля 1901 г. в маленьком городке Байя Маре, расположенном в отдаленном районе Карпатских гор в Австро-Венгрии (Трансильвания). Стремление Крона к знаниям и целеустремленность проявились еще в школьные годы. В гимназии он интенсивно изучал физику и математику, посвящал много времени изучению астрономии, стенографии и английскому и немецкому языкам.

В июне 1919 г. Г. Крон получил диплом об окончании гимназии. В сентябре приступил к занятиям в университете штата Мичиган США, в то же время подрабатывая на жизнь и учебу.

На предпоследнем курсе университета Габриэль написал небольшую работу «Основы новой космологии», в которой попытался описать вселенную как инженер, игнорируя такие препятствия, как законы гравитации и относительности. В 1930 г. он опубликовал первую работу под названием «Обобщенная теория электрических машин», которая положила начало целой серии его работ, представляющих исчерпывающий анализ и синтез разнообразных систем.

С 1934 г. и до последних дней жизни Крон работал в компании «Дженерал электрик». Он умер после короткой болезни 25 марта 1968 г.

Что же представляют работы Г. Крона?

Работы Крона опираются на фундаментальные понятия современной физики и математики, с использованием аппарата тензорного анализа, причем в непривычной форме. Сам Крон писал о своем методе: *«Когда автор в начале 30-х годов выступил с единой тензорной и топологической теорией вращающихся электрических машин, он столкнулся с очень неприятной неожиданностью. В большинстве журналов совершенно непредвиденно новые понятия, введенные автором, были решительно объявлены ненужными или ошибочными... С другой стороны, ряд сотрудников Института перспективных исследований в Принстоне (О. Веблен, Н. Вейль, Дж. фон Нейман) и несколько бывших сотрудников того института (Б. Хоффман, П. Ланжевэн и др.) настойчиво советовали автору продолжать дальнейшие исследования. Даже Эйнштейн говорил автору, что он знает от своих сотрудников о его работах (поскольку последний использовал в практических задачах эйнштейнову нериманову динамику общей теории электрического и гравитационных полей). Мнения авторитетных ученых не имели ничего общего с крайне вздорными высказываниями этой группы инженеров».*

Хотя в работах Крона использован язык электротехники, он неоднократно подчеркивал, что эта терминология не является обязательной и его метод может быть изложен на языке самых современных математических теорий, таких, как алгебраическая топология, геометрия дифференцируемых многообразий, групп гомологии и когомологий, не говоря уже об обычном тензорном и матричном исчислении.

«Работы Крона, который в течение 35 лет опубликовал 5 монографий и более 100 статей, нашли в зарубежной литературе широкий отклик. В многочисленных работах разных авторов его методы применялись к самым разнообразным задачам. В ряде стран действуют специальные научные объединения ученых, развивающие тензорные методы — «тензорный» клуб в Великобритании или исследовательская ассоциация прикладной геометрии в Японии.

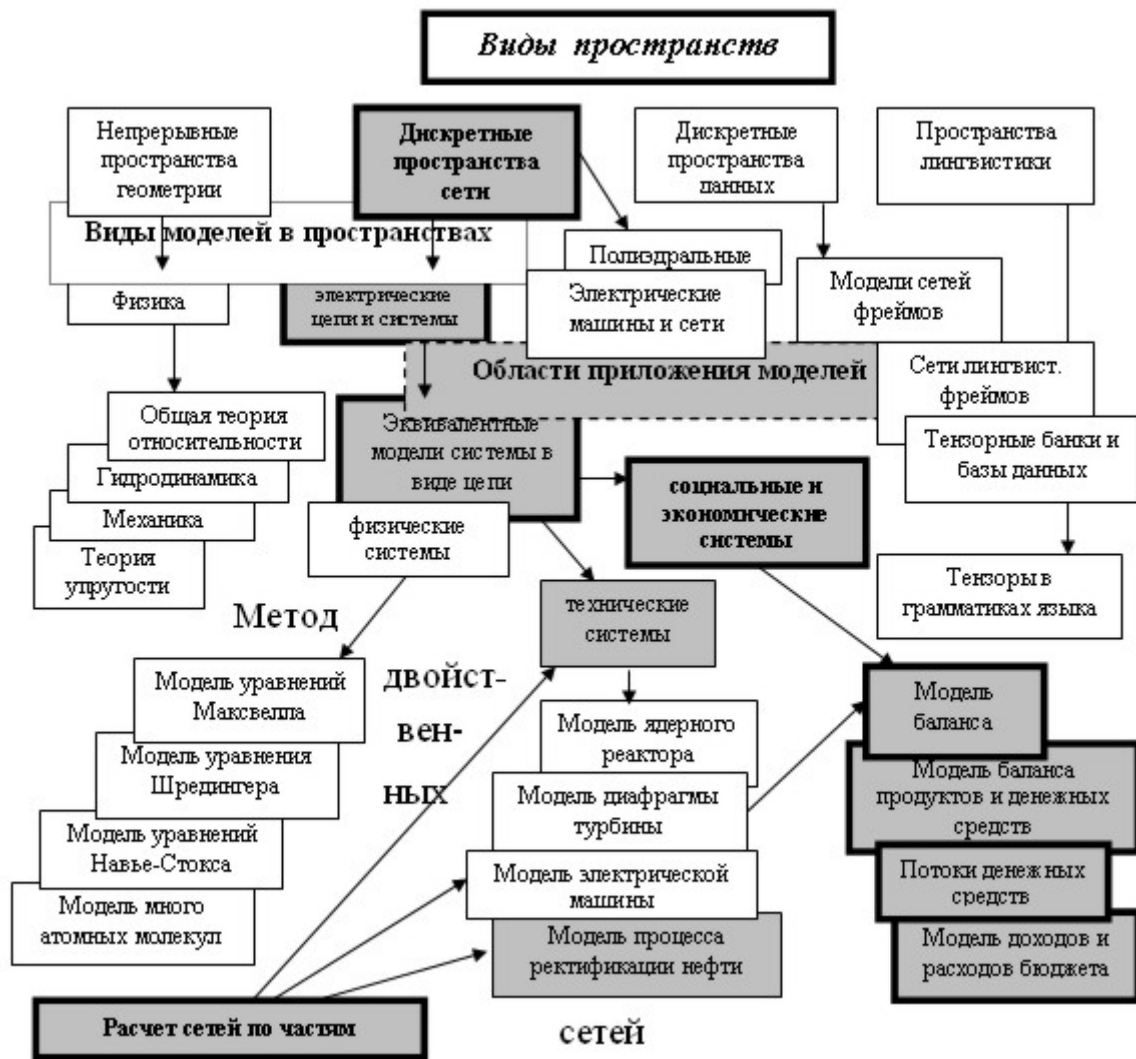
Его награды включают премию Монтефиоре, он являлся почетным мастером наук Мичиганского университета, почетным доктором Ноттингамского университета (1961 г.), патроном и почетным членом «тензорного» клуба Великобритании и исследовательской ассоциации прикладной геометрии в Японии. Оригинальность Крона является результатом его тензорной методологии и математики.

В 1955 г. на русский язык с большими сокращениями был переведен его «Краткий курс тензорного анализа для инженеров–электриков» («A short course in tensor analysis for electrical engineers»), написанный на основе работ 1932—1939 гг. и получивший название в русском переводе — «Применение тензорного анализа в электротехнике» (М., 1955). Многочисленные статьи в различных иностранных журналах оставались труднодоступными, а понимание их без знания общего метода Крона было весьма затруднено.

В 1972 году была предпринята попытка восполнить данный пробел путем издания на русском языке монографии Крона «Исследование сложных систем по частям — диакоптика», обобщающей многолетние исследования автора. Однако крайне лаконичная манера изложения, предполагающая знание предыдущих работ автора, по-прежнему не оставляла надежд на овладение тензорными методами теми, кому был адресован труд — инженерами-практиками. Наконец, в 1978 г. появился перевод объемного труда Крона «Тензорный анализ сетей», вышедший в свет в оригинале еще в 1939 году. В 1985 г. вышла также книга А. Петрова «Тензорная методология в теории систем», в которой в доходчивой форме освещаются идеи Крона, приводятся примеры расчета экономических систем с использованием тензорной методологии.

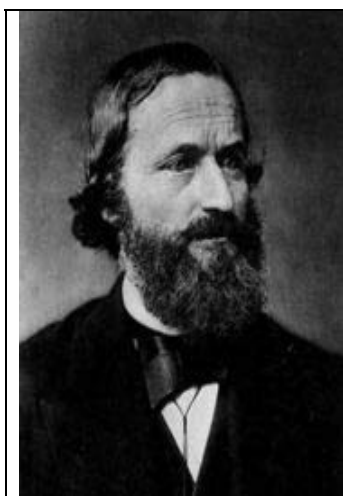
3. Краткая справка

Основные направления применения тензорного метода, сложившиеся к настоящему времени, показаны на рис.



1:

Рис. 1 Области применения тензорного метода [по А. Е. Петрову]



Г. Кирхгофф
Kirchoff G.

Впервые особенности структуры системы по отношению к электрической цепи рассмотрел **Кирхгофф** [Kirchoff G., 1847]. Он установил два известных закона поведения токов и напряжений в элементах структуры — в узлах и контурах. **М. Фарадей** рассматривал силовые линии (трубки) для наглядного представления электрического и магнитного потока. На основании этих представлений **Дж. Максвелл** в своих работах, начиная со статьи «О Фарадеевых силовых линиях», получил свои уравнения электромагнитного поля. **Г. Вейль** предложил рассматривать токи и напряжения как контра- и ковариантные векторы [Weyl, 1923]. Это первое применение геометрического подхода в технических системах.

Первым применил тензорный метод в технике **Г. Крон**. Первой работой в этой области стала «Единая теория электрических машин» [Kron, 1930]. В то время считалось, что все машины столь различны, что единой теории нет.

В работе Г. Крона все электрические машины исследовались с единой точки зрения построения диаграмм, *которые показывают величину и направление потоков энергии между различными частями сложной машины.*

В нашей стране первой работой по применению тензорного метода для расчета асинхронной машины с конденсаторами была кандидатская диссертация А. С. Шаталова [Шаталов, 1941]. В 40 — 50-х гг. на семинарах А. А. Андропова были выполнены работы по применению тензорного метода для расчета задач в области электромеханики, в частности А. В. Гапоновым-Греховым. Тензорный метод развивали В. А. Веников, И. П. Копылов.

В 1955 г. на русский язык была переведена книга Крона «*Применение тензорного анализа в электротехнике*» [Крон, 1955]. В 1969 г. в журнале «*Электричество*» был опубликован некролог Г. Крону [Веников и др., 1969], где высоко оценивались его работы. В 1972 г. переведена *Диакоптика* [Крон, 1972]. В 1978 г. переведен «*Тензорный анализ сетей*» [Крон, 1978]. На семинарах П. Г. Кузнецова показаны преимущества тензорной методологии для проектирования любых сложных систем [Кузнецов, 1973—1980].

Эти семинары проводились в Вычислительном Центре АН СССР и привлекли большое внимание молодых ученых и специалистов из самых разных областей науки и техники. Впоследствии подобные семинары стали проводиться во многих институтах и ВУЗах страны, где рассматривались различные приложения тензорного анализа Г. Крона. На семинарах Л. Т. Кузина обсуждались приложения тензоров для проектирования технических и информационных систем [Кузин, 1994]. В 60–80-е гг. тензорный метод расчета применялся для расчета технических систем в ряде вузов — МИФИ, МИЭМ, МЭИ, ИвГУ и др.

С 1975 по 1980 гг. проводились семинары в институте Социологических исследований АН СССР, Московском Государственном институте Международных отношений (МГИМО) и Дипломатической Академии МИД СССР (**Большаков Б. Е.**), где обсуждались возможности применения **тензорных методов** для построения **моделей** развития страны как социально-природных систем.

В 1978 году полученные на этих семинарах результаты по моделированию международных взаимодействий были доложены и одобрены на Международном конгрессе политических наук в г. Москве (Б. Е. Большаков, Л. Н. Вдовиченко).

Аналогичные семинары проводились в институте систем управления Госплана России (1981—1985 гг.) с целью отработки компьютерных систем контроля за ходом подготовки и выполнения решений (Большаков Б. Е.).

Разработано матричное представление реляционного языка базы данных [Кузина И. В., Петров А. Е., 1976]. Этот подход применялся для проектирования банков данных и систем управления базами данных [Арменский А. Е. и др., 1983, 1986].

В 1984 году Петров А. Е. применил тензорный метод для анализа экономических систем. Была построена эквивалентная модель и разработан алгоритм расчета по частям.

Тензорный метод использовался для разработки информационных систем, методов анализа программ А. Е. Арменский [Арменский, 1989]. Программно реализован для расчета газотранспортных сетей [Милославская, 1989].

В Ивановском Государственном университете Г. А. Зайцев и его сотрудники исследовали математические основы метода разрывания Крона с точки зрения теории категорий и алгебраической физики [Сметанин Е. В., 1989]. Результаты применялись для анализа транспортных систем [Образцова Р. И., Кузнецов П. Г., Пшеничников С. Б., 1996].

На основе обобщения алгебраических диаграмм Роса и теории категорий были разработаны алгоритмы диакоптики для распределенных вычислительных систем, в которых подзадачи решаются на отдельных ЭВМ с минимальным обменом данными между ними [Котарова И. Н., Шамаева О. Ю., 1979], сформулированы критерии эффективности применений моделей вычислений, определяющие связь параметров задачи и вычислительной системы [Шамаева, 1991]. Тензорный метод применен для

моделирования режимов линейных двигателей транспорта на магнитном подвесе [Сохор Ю. Н., 1991, 1997]; для расчета вибросостояния газотурбинных двигателей [Деглин Э. Г., Петров А. Е., 1991].

Тензорные методы применяются в лингвистике (Сухотин В., 1978). Построена геометрическая модель анализа текстов, дающая возможность изучать смысловые инварианты, сохраняющиеся при переводах и пересказах.

4. Несколько положений, без которых сознательное освоение работ Г. Крона невозможно

1. Если классическая механика имела дело с координатами, которые характеризуют положение тела в пространстве, как географическое положение, то обобщенные «координаты» Г. Крона никакого отношения к местоположению системы не имеют.

2. Г. Крон отождествляет понятие «ТЕНЗОР» с определенной ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНОЙ.

Нужно заметить, что понятие РАЗМЕРНОСТИ физической величины было введено Максвеллом, который и предложил символ размерности в виде квадратных скобок.

Ранее в разделе «Физика» была специально рассмотрена пространственно–временная система, которая охватывает ВСЕ ВОЗМОЖНЫЕ физические величины: $[L^1T^6]$.

3. Не следует забывать Лагранжа, который пользовался принципом «виртуальных скоростей», а не «виртуальных перемещений». Это означает, что Лагранж пользовался «принципом сохранения МОЩНОСТИ», а не «принципом сохранения ЭНЕРГИИ».

Линейная форма, которую составляют из произведений сил на перемещения, равная нулю, означает сохранение энергии. Но линейная форма, составленная из произведений сил на скорости, равная нулю, означает сохранение мощности.

4. Перечисленные пункты, затрудняющие понимание и практическое использование работ Г. Крона, предполагают знание ответа на три вопроса:

а) Что такое система универсальных величин?

б) Что является инвариантами в системе «природа—общество—человек»?

в) Чем отличается ЗНАНИЕ математики от УМЕНИЯ использовать ее при проектировании конкретных систем?

Однако все эти вопросы были уже предметом нашего специального рассмотрения. Практически в каждом разделе портала так или иначе обсуждались эти вопросы. В этом смысле весь предшествующий текст является своеобразной подготовкой к восприятию идей Г. Крона для анализа, синтеза и проектирования разнообразных систем. Пусть теперь говорит сам Крон, а мы будем давать лишь необходимые комментарии.

5. Основная идея Г. Крона

КЛЮЧЕВОЙ ИДЕЕЙ ЯВЛЯЕТСЯ «ОРГАНИЗАЦИЯ» разнообразных сетей в соответствии с их фундаментальными свойствами и ожидаемым назначением. ЭТА ОРГАНИЗАЦИЯ РЕАЛИЗУЕТСЯ ВВЕДЕНИЕМ «ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ», КОТОРЫЕ УПРАВЛЯЮТ РАЗВЕРТЫВАНИЕМ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ.

Обозначение чисел с помощью **одного символа** является подобной организацией. Такой стенографический способ обозначения использовался со времен Кирхгофа.

Дальнейший шаг в совершенствовании организации — обозначение **одним символом** не набора чисел, а ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ, действительно существующей в природе. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ, используемый со времен Максвелла, является примером организации этого типа.

Поскольку один и тот же физический объект можно измерить по отношению к бесконечному числу систем отсчета (координат) и каждое измерение дает набор чисел, то теперь **ОДИН СИМВОЛ ПРЕДСТАВЛЯЕТ БЕСКОНЕЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО ТАКИХ НАБОРОВ ЧИСЕЛ ВМЕСТО ОДНОГО.**

Векторный анализ, однако, является весьма ограниченным типом организации, поскольку он представляет объекты, существующие в **ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ.**

Более совершенный тип организации требует ввести **обобщенные координаты** и использовать новые типы пространств, имеющих более трех измерений и более сложную структуру, чем евклидово пространство. Эти новые пространства наполнены новыми типами объектов, каждый из которых обозначается **одним символом.** Эти пространства и объекты, существующие в них, порождаются «группой преобразований» так, что имеется столько пространств, сколько соответствующих им «групп преобразований».

Тензорный анализ занимается систематическим изучением этих обобщенных пространств и объектов в них

С этой точки зрения **ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ МОЖНО РАССМАТРИВАТЬ КАК РАСШИРЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА ОТ ТРЕХ- ДО N- МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ОТ ЕВКЛИДОВЫХ ДО НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ.**

Организация этим не ограничивается, N -мерные пространства можно обобщать до бесконечно-мерных пространств. Кроме того, вместо использования только четырех-, пяти- и вообще целочисленно-мерных пространств можно использовать $2/3$ -, $4,375$ - или p -мерные пространства, включающие все типы сложных структур.

Подобно любому мощному аппарату тензоры могут быть использованы в самых различных направлениях в зависимости от индивидуальных взглядов и устремлений людей. Приведенные ниже соображения могут пояснить некоторые стороны применения тензоров в анализе и синтезе возникающих весьма различных, взаимосвязанных проблем. **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА В РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МОЖНО СРАВНИТЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАЛЬНОГО КАРКАСА ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ ЗДАНИЙ.**

Фундаменты занимают мало места, строительство здания ускоряется, и само здание становится более устойчивым относительно изменения его элементов. Инженер отваживается проектировать и строить новые типы структур не только для старых, но и для новых применений; он бы даже не пытался делать это, не имея стального каркаса.

Когда каркас установлен, можно укладывать кирпичи сразу на шестидесятом этаже, не затрагивая пятьдесят девять лежащих ниже — возможность, которой не было бы без стального каркаса. Подобные незавершенные этапы могут быть в анализе проблем, где можно исследовать подробно только требуемую часть.

Нет никакой необходимости последовательно в каждой частной проблеме переписывать системы уравнений с одной страницы на другую, удерживая в памяти их содержание.

Все это можно оставить в необработанном виде, в форме нескольких символов, действующих, как каркас, поддерживающий части, представленные детально.

В любое время можно добавить новые «этажи» к уже законченному «зданию» или убрать одну часть и изменить ее в соответствии с новыми требованиями, не разрушая оставшегося.

Использование стального каркаса позволяет сделать **проектирование производством массовым.**

Один и тот же стальной каркас можно использовать для изготовления самых разнообразных зданий, изменяя кирпичную кладку и располагая перегородки в соответствии с требованиями и нуждами различных потребителей.

Обнаружено, что на языке тензорного анализа можно получить уравнения, подобные стальному каркасу, которые представляют поведение и характеристики самых

разнообразных сетей. Будучи однажды установлены, эти тензорные уравнения позволяют находить уравнения поведения или характеристики любой ЧАСТНОЙ системы РУТИННОЙ подстановкой частных констант.

Эта гибкость тензоров позволяет при изучении разнообразнейших систем выделить одну, которая имеет наиболее простую структуру, и изучать свойства и уравнения только этой частной системы.

Эти две характеристики тензорных методов — возможность возводить аналитические «НЕБОСКРЕБЫ» и возможность вводить массовое производство в анализ и синтез задач проектирования — являются особенностью тензорного анализа.

Первая характеристика тензорных методов дает возможность атаковать и решать такие проблемы, к которым он не может приблизиться либо из-за вычислительных трудностей, либо из-за трудности в наглядном представлении сущности проблемы.

Вторая характеристика дает возможность использовать рассуждения и результаты одной решенной проблемы в решении многих других проблем, сохраняя на будущее все или часть результатов одного исследования в тензорной форме и расширяя и комбинируя их разными способами при разнообразных новых исследованиях.

Это сохранение и повторное использование результатов предыдущих исследований аналогично хранению стандартных узлов. Метод тензорного анализа позволяет комбинировать свои тензоры, которые созданы раньше, и преобразовывать их в новые, необходимые тензоры, не повторяя весь анализ всякий раз, когда возникает новая проблема

На языке проектирования проблема состоит в нахождении ФОРМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ, позволяющей получить уравнение поведения системы на всех возможных типах структур при условии, что это уравнение известно для одной структуры.

С этим процессом перехода от системы координат НА ОДНОЙ СТРУКТУРЕ к некоторой произвольной системе координат НА ДРУГОЙ СТРУКТУРЕ связан также обычный процесс перехода от одной системы координат к другой НА ТОЙ ЖЕ САМОЙ СТРУКТУРЕ.

6. Суть метода

Основным свойством всякого тензора по Г. Крону является то, что с помощью группы матриц преобразования можно найти, по определенным правилам, его составляющие в любой системе координат. Способствует ли это упрощению анализа разнообразных систем реального мира? Да, способствует. И именно это упрощение положено в основу метода тензорного анализа.

Пусть требуется определить поведение некоторой системы. Последовательность действий должна быть такова:

1) Не анализируйте непосредственно ДАННУЮ систему, так как она очень сложна. Вместо этого составьте сперва уравнения ДРУГОЙ, РОДСТВЕННОЙ системы, которую гораздо легче анализировать или уравнения которой уже были получены в другом случае.

2) Затем перейдите от уравнений ПРОСТОЙ системы к уравнениям сложной системы путем РУТИННЫХ, СТАНДАРТНЫХ преобразований.

Правила преобразования уравнений простой или известной системы в уравнения ДАННОЙ системы дает ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ.

Возникает вопрос: «Как выбираются более простые системы?».

Особенности этих процедур Г. Крон назвал ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ ПОСТУЛАТОМ. Этот постулат ПРЕДПОЛАГАЕТ, что тензорное обобщение возможно лишь тогда, когда исходная система ПОЛУЧЕНА ИЗ ИЗМЕРЕНИЙ (ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ).

Для «фантомов» ТЕНЗОРЫ НЕ СУЩЕСТВУЮТ. Они — измеряемые ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Существуют два способа, которые могут быть применены каждый в отдельности или оба одновременно.

1. РАЗБЕЙТЕ СЛОЖНУЮ СИСТЕМУ НА НЕСКОЛЬКО СОСТАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ УДАЛЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ, ОПРЕДЕЛЕННЫМ ОБРАЗОМ ВЫБРАННЫХ СВЯЗЕЙ ТАК, ЧТОБЫ КАЖДУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ СИСТЕМУ МОЖНО БЫЛО ЛЕГКО АНАЛИЗИРОВАТЬ. ЭТО РАЗЛОЖЕНИЕ МОЖЕТ БЫТЬ ВЫПОЛНЕНО В НЕСКОЛЬКО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИЕМОМ.

Далее, если уравнения каждой из этих составляющих систем не были выведены ранее, то каждая составляющая снова подразделяется на еще более мелкие части, уравнения которых легко могут быть получены.

Группа составляющих систем, получающихся в результате ПОСЛЕДНЕГО из необходимых делений, называется «элементарной» (или «ПРИМИТИВНОЙ») системой.

Если уравнение какого-либо элемента однажды составлено, нет необходимости повторять все выводы с самого начала, когда этот элемент используется как часть системы. Таким образом, результаты всех исследований, выполненных с помощью тензоров, могут быть заготовлены для будущего использования в задачах различных типов, подобно тому, как стандартизованные детали машин заготавливаются для сборки самых разнообразных конструкций.

2. В дополнение к разложению сложной системы на несколько составляющих систем, ПРИМИТЕ НОВЫЕ, БОЛЕЕ ПРОСТЫЕ, КООРДИНАТЫ ДЛЯ ИСХОДНОЙ ИЛИ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЕЕ СИСТЕМ.

Например, замените, если это возможно, криволинейные координаты прямолинейными.

Новые координаты могут быть воображаемыми, например, симметричные составляющие, нормальные координаты, или же могут существовать в действительности.

Правила перехода от уравнений «элементарной» (или «ПРИМИТИВНОЙ») системы к уравнению действительной системы составляют содержание так называемой «теории преобразования» или «преобразования координат».

ЭТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЮ ОСНОВУ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА.

Множество разнообразных систем отличаются друг от друга только ЧИСЛОМ и СПОСОБОМ СОЕДИНЕНИЯ основных элементов, а различные «ТЕОРИИ» отличаются только принятой системой воображаемых координат.

Аналитическая работа требуется только при исследовании основных элементов. Соединение этих элементов в данную систему представляет собой стандартный процесс.

Для определения тензоров любой конкретной системы реального мира нужно только найти частную матрицу преобразования, отличающую данную систему от элементарной системы.

Раз группа преобразования найдена, тензоры данной системы получаются с помощью стандартных правил преобразования.

Когда составляющие тензоров данной системы найдены, **искомое уравнение поведения системы составляется как копия уравнения элементарной системы.**

Можно конечно проделать все указанные выше операции, не упоминая слово «тензор», и говорить лишь о «матрице старой системы», «матрице новой системы», «матрице преобразования» и т.п.

Тем не менее, признается это или не признается, при этом используются понятия тензорного анализа.

Матрицам не присущи правила преобразования. Они присущи тензорам.

Процесс построения уравнений сложных систем из уравнений их составных частей служит КЛЮЧОМ к тензорному анализу. Без этого процесса изучение всякой отдельной системы представляет собой изолированную задачу, подлежащую решению каждый раз с самого начала.

Поскольку в задачах проектирования приходится иметь дело с более сложными системами, с гораздо большим числом взаимных связей, чем в физике и геометрии, тензорный анализ является по преимуществу инструментом проектирования.

7. «Постулат первого обобщения»

I. Следует обратить внимание на следующий интересный факт: если один элемент системы характеризуется определенными измеримыми величинами, то *множество таких элементов характеризуется n -матрицами этих же величин.*

Множество элементов характеризуется тем же числом символов того же типа, что и один элемент, но отличается тем, что *отдельные числа заменяются n -матрицами различной размерности.*

Следовательно, нужно заметить, что n -матрицы — это совсем не случайный набор каких угодно чисел.

В каждой задаче должно использоваться ровно такое количество n -матриц, сколько имеется в ней понятий, выраженных в измеримых величинах.

Количество n -матриц может быть увеличено или уменьшено только в соответствии со строгими правилами, вытекающими из природы решаемой задачи.

II. В дальнейшем будет показано, что вообще сложные системы, выраженные в терминах измеримых величин, не только описываются тем же количеством символов, что и простые системы, но и *весь метод рассуждения, используемый в анализе их поведения, соответствует этапам анализа простейших систем, отличаясь только тем, что вместо каждой величины используется n -матрица.*

Другими словами, *прежде чем исследовать любую сложную систему со многими переменными, необходимо сначала выполнить анализ простой системы с одной (или более) степенью свободы. После этого можно перенести все этапы этого анализа на сложную систему, заменяя каждую величину соответствующей ей n -матрицей.*

Далее будет также показано, что вид окончательного уравнения сложной системы с n степенями свободы совпадает с видом *окончательного уравнения* простой системы с одной (или более) степенью свободы, отличаясь только тем, что каждая величина заменена n -матрицей.

Этот рабочий прием, дающий экономию умственных усилий, называется «*постулатом первого обобщения*» и может быть выражен так:

*Метод анализа и окончательные уравнения, описывающие поведение сложной системы (с n степенями свободы), могут быть найдены последовательно при анализе простейшего, но наиболее общего элемента (*unit*) системы при условии, что каждая величина заменяется соответствующей n -матрицей.*

Нужно помнить, что простейший элемент системы может содержать две или более переменных, а также то, что система может быть образована из двух или более элементов существенно различного типа, так что для каждого из этих элементов необходимо отдельное уравнение.

Использование n -матриц предлагает новый подход, не вытекает из обычных соображений, и окончательный ответ получается в новой форме, требующей намного меньше вычислительной работы.

8. «Постулат второго обобщения»

Созидание посредством «организации» новых сущностей из простого набора n -матриц и наделение этих новых сущностей новыми свойствами и составляет основную цель тензорного анализа.

Это созидание имеет тот же характер, что и рождение «молекулы» из отдельных «атомов», наделяющее молекулу за счет организации такими новыми характеристиками и такими новыми свойствами, которые отсутствовали у атомов до их соединения в молекуле. Это созидание имеет тот же характер, что и организация сообщества людей в государство, имеющее такие свойства, которыми не обладали входящие в него отдельные личности.

Для того чтобы наделить n -матрицы новыми свойствами, которыми они не обладали, и тем самым создать новую математическую сущность, абсолютно необходимо ввести новое содержание в матричное уравнение, которым не обладают обычные уравнения.

Это новое содержание вводится с помощью трех взаимосвязанных понятий: **преобразование, инвариантность и группа.**

Фундаментальное предположение тензорного анализа состоит в том, что:

- 1) новая система описывается тем же числом n -матриц и того же типа, что и старая система, но отличается от нее численным значением компонент n -матриц;
- 2) уравнение новой системы, записанное в n -матрицах, имеет тот же вид, что и уравнение старой системы.
- 3) n -матрицы новой системы могут быть найдены из n -матриц старой системы с помощью рутинного преобразования.

Эти положения (или их эквиваленты) названы Г. Кроном «постулатом второго обобщения».

Таким образом, переход от одного способа соединения к другому не требует введения новых n -матриц и изменения расположения n -матриц в уравнении.

Отличие состоит только в том, что новые n -матрицы имеют компоненты, отличающиеся от компонент матриц прежнего уравнения.

Операция перехода от одного способа соединения к другому названа «преобразованием» или (используя словосочетание, которое часто употребляется, но звучит непривычно в описанном случае) «преобразованием системы координат».

Это можно также назвать «заменой переменных», поскольку множество одних переменных заменяется другим множеством переменных.

Одной из целей тензорного анализа в анализе любой проблемы является введение лишь такого количества символов, которое соответствует количеству сущностей, участвующих в естественном явлении, и такого количества связей (отношений) между ними, которое имеется в наблюдаемом явлении.

Постулат второго обобщения утверждает, что одному и тому же символу A соответствует не одна n -матрица, а очень большое количество n -матриц, каждая из которых имеет одну и ту же размерность, одно и то же число осей, но отличаются значениями компонент.

Теперь каждый символ или базовая буква означает бесконечное число n -матриц, которые образуют новую математическую сущность, называемую «геометрический объект».

Это означает, что с каждым геометрическим объектом в каждой частной системе координат связана n -матрица, которая дает значение компонент одного и того же геометрического объекта в этой частной системе координат. Если система координат изменяется, то изменяются компоненты геометрического объекта (идентифицируемые штрихами индексов), но сам геометрический объект остается неизменным (что представляется неизменной базовой буквой).

С введением новой сущности — геометрического объекта — вместо n -матрицы необходимо ввести новую терминологию и новые обозначения

- 1) при использовании индексного обозначения n -матрица отличается от геометрического объекта путем заключения индексов n -матрицы в скобки: $z_{(\alpha)(\beta)}$. Таким образом, $z_{\alpha\beta}$ — геометрический объект, представляемый n -матрицами в бесконечном числе систем координат; $z_{(\alpha)(\beta)}$ — n -матрица, имеющая компоненты только в данной системе координат.
- 2) уравнение, в котором, каждый символ представляет геометрический объект, а не просто n -матрицу, называется, **инвариантным**, а не матричным уравнением.

9. Чем отличаются тензоры Крона от обычных тензоров?

Главное отличие заключается в том, что в то время как обычные тензоры обозначают одной буквой набор величин в **непрерывном**, тензоры Крона обозначают одной буквой набор величин в **дискретном** пространстве. Тензоры Крона относятся к дискретной структуре системы.

Тензоры суть геометрические объекты, компоненты которых, записанные в некоторой системе координат, при переходе к некоторой другой системе координат преобразуются по определенным правилам.

Роль осей систем координат в дискретном пространстве сетей играют пути, образуемые элементами сети. Пути бывают двух видов — замкнутые и открытые. Первые Крон называет контурами, вторые — узловыми парами.

Существует два вида систем координат — замкнутые и открытые.

Все величины в сети записываются в терминах координатных осей двух подпространств: m — замкнутых путей и k — открытых, между которыми существует соотношение $k + m = n$, где n — число элементов, задающее размерность пространства сети.

Преобразование систем координат в этом пространстве заключается во всевозможных пересоединениях n элементов в сети различными способами, что приводит к тому, что вместо старых путей в качестве системы координат выбираются новые пути.

В этом смысле все сети, состоящие из одних и тех же n элементов, могут рассматриваться как одна и та же сеть, но представленная в различных системах координат.

Поэтому различные сети, отличающиеся друг от друга лишь соединением своих элементов, описываются уравнениями поведения одного типа при условии, что эти уравнения тензорные.

Собственно сеть, состоящую из элементов, Крон рассматривает как «мертвую», невозбужденную. Она становится «живой», когда возбуждается электромагнитным полем. На «мертвую» подлежащую сеть накладываются токи и напряжения. В замкнутой системе токи являются величинами отклика, а приложенные напряжения — воздействующими величинами.

В открытой системе, наоборот, воздействуют токи, а напряжения — отклик.

Тензор преобразования дает величины отклика при переходе от одной сети к другой.

Чтобы получить закон преобразования других величин сети, необходимо еще одно соотношение. Таким соотношением в случае, когда мы имеем дело с одним и тем же пространством сети, является мощность на входе или на выходе сети.

При преобразованиях сети мощность остается инвариантной.

Сам по себе этот факт достаточно очевиден. Дело в том, что геометрическая модель Крона любой системы представляет собой ортогональную сеть, потоки энергии в единицу времени на входе и выходе которой должны быть равны — закон сохранения мощности.

Единственные изменения, происходящие в сети, заключаются в том, что те же самые элементы соединяются по-другому. Поэтому суммарный поток энергии E через сеть (а это и есть мощность $P = dE/dt$) должен оставаться тем же самым.

Потоки энергии лишь перераспределяются между путями открытыми и замкнутыми. Мощность в ортогональной сети, рассматриваемой как совокупность открытых и замкнутых путей, остается той же самой.

Отметим, что в самой первой работе в 1855 г. «О фарадеевых силовых линиях» Дж. Максвелл пишет: «Работа, израсходованная за единицу времени для каждой единичной клетки, равна единице» (Дж. К. Максвелл. «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля». М., ГИТТЛ, 1954, с. 25—26).

Если из «трубок тока» Максвелла образовать сеть, то инвариантом такой сети и будет мощность.

Г. Крон сознательно выбрал язык электротехники. Это произошло потому, что для систем, которые являются передающими сетями, оказалось необходимым использовать инвариант мощности.

Заключение

Мы рассмотрели самые общие представления о методе проектирования сложных систем, основанные на тензорном анализе Г. Крона. Приведенная в этом разделе краткая справка об использовании метода показывает, что тензорные методы Г. Крона нашли применение в самых разнообразных естественных, технических и социальных областях знания при проектировании, анализе, синтезе и расчете динамических систем — сетей с переменной структурой.

Принципиальной особенностью метода является то, что он не допускает в проектировании сложных систем плохо определенные термины, не выраженные в терминах физически измеримых величин понятия, которые могут существенно исказить результаты проектирования.

Другой принципиальной особенностью является использование в качестве инвариантных преобразований закона сохранения мощности, что является адекватным выражением сущности системы «природа—общество—человек».

Третьей принципиальной особенностью метода является то, что он дает возможность осуществлять проектирование любых сложных систем в переходной ситуации, когда вместо старых путей в качестве системы координат выбираются новые пути, ориентированные на устойчивое развитие, согласованное с общими законами природы.

Мы не знаем другого развитого физико-математического метода проектирования сложных систем разнообразной природы, который бы обладал указанными особенностями.

Вывод

Назначение любой технологии — выполнять процесс внешней работы. Скорость выполнения рабочего процесса характеризуется полезной мощностью системы. Мы можем искать «структуру» соединения частей или сеть с конечной целью — выполнить работу с той же скоростью и иметь минимальную входную мощность. Но можно фиксировать входную мощность и искать такую «структуру» соединения частей, которая максимизирует полезную мощность на выходе системы. В этом смысле переход от конструкции одной системы к другой при инварианте входной мощности можно рассматривать как преобразование координат. Здесь и находится ключевая идея Г. Крона, весьма важная с точки зрения проектирования систем, идея, что изменение конструкции есть преобразование координат.