

Тензорный анализ сетей Г. Крона и его роль в проектировании систем¹

Предисловие редакторов перевода. С именем известного американского инженера и ученого Габриэля Крона связаны едва ли не самые острые научные споры и дискуссии нашего века. Результаты последовательно развертывавшихся работ этого ученого, публиковавшиеся на протяжении почти 40 лет, постепенно принесли ему широкое признание и выдвинули в ряды классиков науки, однако до сих пор многие идеи Крона остаются до конца непонятными, а его методы не имеют достаточно широкого применения.

Причина такого положения, как объективно объясняет сам Крон, заключается в том, что к построению своих математических концепций он подходит с инженерных позиций, неизбежно допуская определенные неточности и нестрогие утверждения, тем самым навлекая на себя нарекания математиков. С другой стороны, математический аппарат, развиваемый Кроном, достаточно сложный и может быть понят только инженером, имеющим специальную математическую подготовку. Поэтому при его жизни, да и в наши дни инженеры в большинстве своем также не приняли на вооружение теорию Крона, очень часто обвиняя его в математических излишествах.

Однако, как это стало понятно в последнее десятилетие, Крон заложил определенные научно-технические основы нового специалиста, называемого в наши дни инженером-математиком, который способен смело вмешиваться в абстрактные математические теории, деформируя и развивая их

¹ Авторы: Л.Т. Кузин, П.Г. Кузнецов, А.Е. Петров. Текст публикуется согласно изданию: Г. Крон. Тензорный анализ сетей. — М.: Советское радио, 1978. — с. 5–8, 691–697.

применительно к конкретным потребностям инженерной практики.

Начав с построения единой для всех типов электрических машин теории, основанной на введении тензоров, понятия обобщенной машины и неримановой геометрии, Крон в дальнейшем дал обстоятельный анализ использования тензора преобразования при исследовании неподвижных электрических сетей. В предлагаемой вниманию читателя книге подробно излагаются основы синтеза теоретико-множественной и алгебраической (комбинаторной) топологий. Этот синтез представляет собой объединение аналитического исследования процессов, происходящих в системах, с изучением топологической структуры систем, представленных электрическими моделями.

Затем была создана методика представления самых различных систем, а также фундаментальных уравнений теоретической физики (Максвелла, Шредингера и т.д.) с помощью моделей электрических цепей. На этой основе был разработан метод исследования сложных систем по частям (диакоптика) разделением на части модели исследуемой системы, решения этих частей отдельно с последующим объединением решений отдельных частей в решение всей системы.

Обобщением и объединением всех предыдущих работ явилась разработка Кроном теории полиэдральных сетей и основанных на этих сетях «самоорганизующихся автоматов», которой он занимался в последние годы жизни. Полиэдр, погруженный в магнитогидродинамическую плазму, проявляет свойства самоорганизации и, по мнению Крона, может служить теоретической основой для создания «искусственного мозга». Такие системы, как электрические машины, представляют собой

полиэдры 3-го порядка или совокупность 0-, 1-, и 2-сетей. Хотя большая часть исследований, проведенных Кроном, относится к электротехническим и электромеханическим системам, общность введенных им тензорных и топологических методов позволяет говорить также о большом вкладе в единую теорию динамических систем.

В СССР интерес к работам Крона проявился еще в конце 40-х годов, когда в Горьковском госуниверситете под руководством академика А.А. Андропова разбирались и обсуждались идеи Крона в связи с исследованиями возможности создания общей теории динамических систем; А.В. Гапоновым, ныне академиком, проводились исследования по применению его методов. После смерти А.А. Андропова интерес к работам Крона несколько снизился.

В 1965 г. была переведена монография Крона «Применение тензорного анализа в электротехнике» [9], в послесловии к которой редактор, отдавая должное изложенному в книге методу, поставил, однако, под сомнение необходимость применения слишком, по его мнению, сложных тензорных методов.

Новый повышенный интерес к работам Крона возник в конце 60-х годов в связи с развитием вычислительной техники и проблемами создания автоматизированных систем проектирования и автоматизированных систем управления организационными системами и технологическими процессами. В 1968 г. в некрологе, посвященном Крону, в журнале «Электричество» [10] ученый характеризуется как «основоположник тензорного и матричного анализа электрических цепей и машин, создатель обобщенной теории электрических машин». Его идеи и методы получили развитие в трудах В.В. Хрущева, И.П. Копылова и др. В 1972 г. вышел

перевод одной из основных монографий Крона «Диакоптика» [1], а в 1975 г. появилось учебное пособие для вузов, в котором единая теория электрических машин излагается с позицией американского ученого [16].

За рубежом работы Крона всегда привлекали большое внимание ученых и инженеров. Начиная со статьи, опубликованной в 1930 г. [2], с последующей дискуссией, результаты его исследований, представленные в пяти монографиях и более ста статьях, были предметом горячих споров и обсуждений.

Профессор Б. Хоффман, один из сотрудников А. Эйнштейна, посвятил целый ряд обстоятельных статей разбору наиболее тонких понятий теории преобразований Крона. Рассмотрению работ Крона был посвящен специальный выпуск журнала института Франклина [18], его теория развивается в многочисленных статьях и монографиях [11–14]; памяти Крона посвящен сборник статей «Габриэль Крон и теория систем» [3]. Существуют два общества, которые с начала 50-х годов занимаются разработкой и применением в науке и технике идей Крона. В Японии под руководством профессора К. Кондо с 1954 г. действует «Исследовательская ассоциация прикладной геометрии», выпустившая уже четыре тома мемуаров [5], в которых работы Крона характеризуются как «эпохальные», являющиеся основой для создания в дальнейшем единой теории конструирования инженерных систем. В Англии с 1950 г. действует «Тензорное общество Великобритании» (Tensor Society of Great Britain), выпускающее журнал «Matrix and Tensor Quarterly».

Книга «Тензорный анализ сетей» [15], перевод которой предлагается советскому читателю, вышла в свет в 1939 г., а спустя четверть века, в 1965 г., вышло второе издание, точная

копия предыдущего. В книге подробно излагается метод объединения структурных свойств сети, заложенных в диаграмме соединения ее элементов и представляемых тензором преобразования, с функциональными свойствами сети, заложенными в уравнениях ее поведения, в единый аппарат исследования сетей. «Тензорный анализ сетей» — ключ к изучению других работ Крона, в частности, метода диакоптики. По существу эта книга является подробным изложением содержания первых двух глав книги Крона «Применение тензоров к анализу вращающихся электрических машин» [17], относящихся к неподвижным электрическим сетям.

Обстоятельное изложение этих вопросов потребовалось потому, что такие понятия, как тензор преобразования, инвариантность мощности, примитивная и ортогональная сеть были (да и сейчас еще остаются) необычными и весьма трудными для восприятия. Даже очень образованные инженеры мало знакомы с тензорным анализом и неримановой геометрией, в свою очередь физики и математики редко интересуются теорией электрических машин. Вот, например, как описывает Б. Хоффман свое первое знакомство с классической статьей Крона «Нериманова динамика вращающихся электрических машин»: «Я собирался не только разобраться в рассуждениях Крона, но и высказать компетентное мнение относительно их справедливости. К моему удивлению я обнаружил, что не понимаю статью. Я мог проследить за вводными рассуждениями, но они вскоре кончались, а приложения относились к вращающимся электрическим машинам, в которых я ни в коей мере не мог считать себя экспертом. В то время я даже ничего не знал о продольных и поперечных осях. Это может шокировать тех, для кого эти понятия стали второй натурой» ([3], с. 20). К сожалению, описанная ситуация, как

правило, возможна при изучении практически большинства оригинальных методов Крона. Определенная незаконченность и нестрогость рассмотрения, которая характерна для инженера-математика, явилась причиной критики работ Крона как со стороны математиков (за недостаточную, по их мнению, строгость), так и со стороны инженеров, считавших излишним привлечение абстрактных математических дисциплин к исследованиям конкретных технических систем. Делались, например, неоднократные попытки заменить его тензорные методы матричными, а электрические модели — графами.

Приняв во внимание многочисленные неудачные попытки «исправить» Крона, мы при переводе постарались максимально бережно отнестись к понятиям и терминологии этой классической работы, вплоть до сохранения обозначений. Это было достаточно трудно, поскольку большинство вводимых Кроном понятий не имеют аналогов в русской научной терминологии. Некоторые пояснения к тексту приведены в подстрочных примечаниях. Более подробные комментарии даны в послесловии. Нельзя считать эти комментарии исчерпывающими, поскольку подробный анализ работы Крона потребовал бы специального исследования.

В данной работе помещены два введения автора, в одном, написанном в 1939 г., даны исходные предпосылки подхода и рекомендации для читателей, а в другом (1965 г.) — ретроспектива и перспектива дальнейшего развития теории. Эти введения избавляют редакторов перевода от необходимости написания более пространныго введения. В заключение редакторы перевода благодарят всех, кто способствовал появлению этой книги.

Перевод выполнен Б.И. Калюжным, В.М. Капустяном, И.В. Кузиной, В.П. Мазуриком, А.Е. Петровым, В.И. Хрипуновым.

Роль тензорного анализа Г. Крона в проектировании систем. В настоящее время стало банальным говорить о необходимости применения математики к решению технических проблем. Остается не очень ясным вопрос о том, что значит «использовать математику» в техническом проектировании. Принимая, что роль математики очень велика, нужно понять ее «историческое назначение». В этом вопросе точка зрения инженера-пользователя не совпадает с точкой зрения математика-разработчика. Эта точка зрения инженера-пользователя и представлена в настоящей книге. Г. Крон пишет, что эта книга написана инженером для инженеров, т.е. тем, кто конструирует большие технические системы, для тех, кто будет конструировать большие технические системы.

То, что в книге Г. Крона называется «геометрическим объектом» — это известный инженеру «объект», который в различных системах координат имеет «различный вид». В этом смысле инженер, использующий математику, не нуждается в «теоремах существования» искомого решения: решение существует всегда. Поэтому обращение инженера к математику за консультацией всегда имеет смысл, и он не натолкнется на ответ математика типа: «Не вижу задачи».

В этой книге не используются «криволинейные» системы координат», т.е. не вводятся операции ковариантного дифференцирования, столь характерные для тензорного анализа. Здесь инженер знакомится с алгеброй тензоров. Для желающих ознакомиться с нарастанием широты обобщений, даваемых Г. Кроном в виде постулатов первого и второго обобщений, можно рекомендовать классические книги О. Веблена («Инварианты

дифференциальных квадратичных форм» М., ИЛ, 1948) и О. Веблена и Дж. Уайтхеда («Основания дифференциальной геометрии», М., ИЛ., 1949). Г. Крон дал инженерную интерпретацию этих работ, используя переход к аффинным координатам и аффинным нормальным тензорам.

«Тензорный анализ сетей» — это фактически введение к другим работам Крона, в том числе к диакоптика. В тензорной теории электрических машин показано, что для любой вращающейся электрической машины можно построить эквивалентную неподвижную цепь; эквивалентные электрические цепи были построены для многих фундаментальных уравнений физики, а также для самых различных технических систем. Диакоптика основана на том, что анализируемая система может быть представлена эквивалентной цепью. Поэтому данная книга не является законченным и логически замкнутым изложением формальной теории, а построена так, что наряду с развитием тензорного анализа неподвижных сетей в ней содержатся многочисленные «перекидные мостики», указывающие путь перехода к другим работам Крона.

Чем же отличаются тензоры сетей Крона от обычных тензоров? Главное отличие заключается в том, что в то время как обычные тензоры обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в изотропном пространстве топологии, тензоры сетей Крона обозначают одной буквой набор величин, описывающих некоторую сущность, расположенную в анизотропном пространстве совокупности сетей, отличающихся друг от друга способом соединения их элементов, т.е. тензоры Крона относятся к дискретной структуре системы.

Традиционные тензоры суть геометрические объекты, компоненты которых, записанные в некоторой системе координат, при переходе к некоторой другой системе координат преобразуются по определенным правилам.

$$A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = C_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \dots C_{\alpha'_2}^{\alpha_2} C_{\beta_1}^{\beta'_1} \dots C_{\beta_m}^{\beta'_m} A_{\beta'_1 \dots \beta'_m}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n},$$

где

$$C_{\alpha'_r}^{\alpha_r} = \frac{\partial x^{\alpha_r}}{\partial x^{\alpha'_r}}.$$

— матрица преобразования, элементы которой составляют якобиан перехода от старой системы координат к новой системе координат.

Роль системы координат играют всевозможные виды осей (прямолинейные, криволинейные и т. д.), расположенные в непрерывном пространстве. Роль осей систем координат в дискретном пространстве сетей играют пути, образуемые элементами сети (катушками). Пути бывают двух видов — замкнутые и открытые. Первые Крон называет контурами, вторые — узловыми парами. Эти два вида путей образуют два ортогональных и взаимодополняющих друг друга подпространства в пространстве сети, поэтому существует два вида систем координат — контурные и узловые. Все величины в сети записываются в терминах координатных осей двух подпространств: m — контурных осей и k — узловых пар, между которыми существует соотношение $k + m = n$, где n — число катушек, задающее размерность пространства сети.

Преобразование систем координат в этом пространстве заключается во всевозможных пересоединениях n катушек в сети различными способами, что приводит к взаимному

изменению числа контуров и узловых пар, а также к тому, что вместо старых путей в качестве системы координат выбираются новые пути. В этом смысле все сети, состоящие из одних и тех же n катушек, могут рассматриваться как одна и та же сеть, но представленная в различных системах координат. Поэтому различные сети, отличающиеся друг от друга лишь соединением своих элементов, описываются уравнениями поведения одного типа при условии, что эти уравнения тензорные.

Собственно сеть, состоящую из катушек и соединительных проводов, Крон рассматривает как «мертвую», невозбужденную. Когда сеть возбуждается электромагнитным полем, то на «мертвую» подлежащую сеть накладываются токи и напряжения. В контурах токи являются величинами отклика, а приложенные напряжения — воздействующими величинами, при этом уравнение поведения сети $e_\alpha = Z_{\alpha\beta} i^\beta$. В узловых парах, наоборот, воздействуют токи, а напряжения — отклик; уравнение поведения $I^\alpha = Y^{\alpha\beta} E_\beta$.

В качестве «единичных векторов», расположенных по осям координат (путям в -сети, выбираются величины отклика, т.е. m контурных токов i^α и k узловых напряжений E_β .

Для контурной части сети при преобразовании от одной сети к другой контурные токи в старой сети записываются через токи в новой сети (новой системе координат). Коэффициенты при новых токах образуют матрицу преобразования $C^{\alpha'}_\alpha$, из $i^\alpha = C^{\alpha'}_\alpha i^{\alpha'}$.

Для узловой части сети формула преобразования записывается для узловых напряжений $E_\beta = A^{\beta'}_\beta E_{\beta'}$.

Матрицы $C^{\alpha'}_\alpha$ и $A^{\beta'}_\beta$ представляют вид тензора преобразования в данной системе координат. Именно тензор преобразования является инструментом, с помощью которого записывается структура исследуемой системы» Функции

тензора преобразования значительно шире, чем просто соединение катушек сети. На протяжении книги появляются тензоры преобразования, изменяющие число витков в катушках, вводящие гипотетические токи — все это в рамках пространства одной и той же сети. В гл. 23 вводится тензор синтеза, который, помимо других функций, меняет также импедансы и, что самое существенное, — количество катушек, следовательно, изменяет размерность пространства сети. Таким образом, тензор синтеза осуществляет переход от одного пространства сети к другому.

Тензор преобразования дает величины отклика при переходе от одной сети к другой. Чтобы получить закон преобразования других величин сети, необходимо еще одно соотношение. Таким соотношением в случае, когда мы имеем дело с одним и тем же пространством сети, является мощность на входе $e_\alpha i^\alpha$ или на выходе сети $I^\alpha E_\alpha$. При преобразованиях сети, состоящей из n катушек, мощность остается инвариантной. Сам по себе этот факт достаточно очевиден. Дело в том, что геометрическая модель Крона любой системы представляет собой ортогональную сеть, потоки энергии в единицу времени на входе и выходе которой должны быть равны — закон сохранения потока в сети. Единственные изменения, происходящие в сети, заключаются в том, что те же самые катушки соединяются по-другому, и ни мощность источников, ни нагрузки, ни импедансы катушек не меняются. Поэтому суммарный поток энергии E через сеть (а это и есть мощность $P = dE/dt$) должен оставаться тем же самым. Потоки энергии лишь перераспределяются между путями открытыми и замкнутыми, что и служило источником всех недоразумений. Критики Крона заявляли, что мощность не является инвариантом при контурных (узловых) преобразованиях, когда число контуров (узловых пар) новой сети отличается от их числа

в старой сети, и были правы. Однако мощность в ортогональной сети, рассматриваемой как совокупность открытых и замкнутых путей, остается той же самой.

Отметим, что в самой первой работе Дж.К. Максвелла (1855 г.) «О фарадеевых силовых линиях» уже используется инвариантность мощности. Максвелл, построив геометрическую картину эквипотенциальных поверхностей, рассекаемых трубками тока на объемные «клетки», отмечает:

«Поверхности равного давления вырезают из единичных трубок элементы объема длины l и поперечного сечения h . Все эти элементы объема единичных трубок мы назовем единичными клетками. В каждой из них единица объема жидкости переходит в единицу времени от давления P к давлению $P - 1$ и потому преодолевает за это время единицу сопротивления. Работа, израсходованная на это жидкостью за единицу времени для каждой единичной клетки, также равна единице» (Дж. К. Максвелл. «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля». М., ГИТТЛ, 1954, с. 25–26).

Достаточно заметить, что в стационарном поле общее число клеток постоянно; мы получим в этом утверждении Максвелла закон постоянства величины рассеиваемой мощности.

Если из «трубок тока» Максвелла образовать сеть, то инвариантом такой сети и будет мощность.

Инвариантность мощности тесно связана с несингулярностью тензора преобразования. Контурная и узловая матрицы преобразования сингулярны, поскольку, вообще говоря, при изменении сети меняется число контуров и узловых пар. Однако, если рассматривать преобразование всей сети в целом как ортогональной (пространство которой состоит из двух ортогональных подпространств контуров и узловых

пар), то матрица преобразования этой сети во всех случаях остается несингулярной, пока преобразования остаются в пределах одного пространства сети. Следовательно, матрица преобразования всегда имеет обратную, и совокупность матриц преобразования образует группу.

Тензор синтеза, как было сказано, осуществляет преобразование одного пространства сети в другое, а не только внутри того же пространства. При этом остается инвариантным критерий поведения сети, а мощность уже более инвариантом не является.

Обратим внимание на физику книги, т.е. на ее физическое содержание. Еще в 1944 г. А.А. Андронов и Г.С. Горелик поставили вопрос о разработке «общей динамики машин», как динамики неконсервативных систем. Фактически книга Г. Крона может рассматриваться как введение в общую динамику машин, использующую двойственные уравнения Лагранжа второго рода. Ее можно было бы написать и на языке аналитической динамики, но Г. Крон сознательно выбрал язык электротехники. Это произошло потому, что в аналитической механике нет механического аналога индуктивной и емкостной связи. Кроме того, для машин и механизмов, которые являются передающими сетями, оказалось необходимым использовать инвариант мощности.

Общая динамика машин выделяет в машинах их основное назначение: выполнять процесс внешней работы. Скорость выполнения рабочего процесса характеризуется полезной мощностью машины. Мы можем искать «структуру» соединения частей такой машины или сеть с конечной целью — выполнить работу с той же скоростью и иметь минимальную входную мощность. Но можно фиксировать входную мощность и искать такую «структуру» соединения частей машины или

сеть, которая максимизирует полезную мощность на выходе конструкции. В этом смысле переход от конструкции одной машины к другой при инварианте входной мощности можно рассматривать как преобразование координат.

Здесь и находится ключевая идея Г. Крона, весьма важная с точки зрения автоматизации проектирования технических систем, идея, что изменение конструкции есть преобразование координат.

Для современного состояния теории больших систем и кибернетики в работе Крона важны прежде всего концепции моделей систем в виде обобщенной машины и полиэдральных сетей, которые исследуются методами тензорного исчисления.

Это представляет интерес для появившихся в последнее время так называемых интеллектуальных систем, в частности, интеллектуальных вопросно-ответных систем (ИВОС), интеллектуальных банков данных (ИБД), интеллектуальных сетей связи, теория которых разрабатывается специалистами по искусственному интеллекту.

Методы принятия решений, которые исследуются специалистами по искусственному интеллекту, так или иначе связаны с решением задач оптимизации. Наиболее общую формализацию эти задачи находят в уравнениях Лагранжа II-ого рода, связь которых с сетями Крон исследует в гл. 17 и устанавливает определенную эквивалентность их с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Если не связывать уравнения Максвелла с электромагнитным полем, то в некотором смысле их можно рассматривать как более детальную формальную запись закона оптимальности любых процессов управления.

Представляя эти уравнения в виде геометрического образа (полиэдральной сети) и исследуя его, Крон, по существу,

использует тот же метод, что и в качественной теории колебаний Андронова, где нелинейные дифференциальные уравнения (в обычных производных) качественно исследуются (решаются) геометрически с помощью фазовой плоскости и пространства.

Так же, как в теории колебаний, где исследуются различные траектории в фазовом пространстве типа предельных циклов, в полиэдральной сети рассматриваются пути и циклы, состоящие из дискретных ребер. Каждый «кристалл», полиэдр полиэдральной сети обладает своей автономией, замкнутостью через свою «двойственность» и в то же время (через ту же двойственность) имеет связь с соседними полиэдрами.

Вот именно в этом смысле полиэдральные сети Крона представляют собой универсальную среду для задач принятия решений, что сейчас называется интеллектуальным банком данных.

Далее, современные методы моделирования больших систем переживают определенный этап кризиса. Дело в том, что опыт проектирования таких систем, как автоматизированные системы управления (АСУ) и проектирования (АСП), а также систем принятия решений искусственного интеллекта показал, что все эти системы обладают свойством индивидуальности, т.е. одно предприятие и его АСУ, один профессиональный человеческий интеллект не похожи на другие. Поэтому появилась концепция в теории больших систем о невозможности создания общих моделей, т.е. модели каждой большой системы следует создавать под конкретную, реальную систему со всеми ее индивидуальными свойствами. Однако, используя модель Крона в виде обобщенной машины и полиэдральной сети, и методы их интерпретации, конкретизации (или настройки) на конкретную систему (в

частности, с использованием тензора преобразования S), представляется возможным сохранить для кибернетики методологическую концепцию моделей, очень важную для любой науки.

В гл. 8 книги, где Крон разбирает различие между «геометриями» с точки зрения групп, характеризующих эти преобразования, он рассматривает группу евклидовой геометрии, группу дифференциальной геометрии и топологическую группу. Но этих групп ему мало, и он вводит группу преобразований, которая включает топологическую группу лишь как частный случай. Мы назвали эту новую группу G . Крона «тиринг-топологией». Если топологию называют «резиновой геометрией», т.е. геометрией линий, нанесенных на растяжимую резиновую пленку, которые при всех деформациях сохраняют точки взаимного пересечения, то Крон предлагает еще «разрывать» такую пленку на «куски». Что же здесь может служить инвариантом группы? Оказывается, что в «резиновой» топологии взаимосвязаны два понятия: «принадлежность» и «непрерывность». Принадлежность точки двум пересекающимся линиям сохраняется лишь благодаря «непрерывности» этих пересекающихся линий. Г. Крон «отпрепарировал» понятие «принадлежность» от понятия «непрерывность». В группе «тиринг-топологии» сохраняется «принадлежность» и не сохраняется «непрерывность».

Возьмем лист бумаги. Этот лист имеет площадь. Введем операцию «разрезания» листа бумаги ножницами (без изменения площади!) и операцию раскладывания обрезков на плоскости. Каждая операция изменяет число обрезков и их расположение на плоскости, но все эти операции тем не менее образуют группу, сохраняющую площадь исходного листа бумаги. Более того, это преобразование является линейным —

оно сохраняет «линейную форму», численно равную площади листа бумаги, но число компонент этой линейной формы равно числу обрезков. Число компонент в этой сумме и есть ранг линейного пространства.

Эта новая группа преобразований позволяет вводить квази-изоморфизм для линейных пространств, которые отличаются размерностью, но эквивалентны по численному значению линейной формы. Обычные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

В этой и других книгах Крона роль величины, которая остается неизменной при всех преобразованиях, играет величина мощности: сети считаются эквивалентными, если они рассеивают одинаковую мощность. Такие сети преобразуются друг в друга с помощью тензора преобразования.

Это отличие «линейных» преобразований Г. Крона имеет типично тензорный характер: одна и та же величина мощности представляется различными электрическими схемами или сетями, что соответствует тому, что ее компоненты различны в разных системах координат, а она сама остается неизменной или инвариантной величиной.

Литература

1. Kron G. Diakoptics: The piecewise solution of large scale systems // *Electrical Journal* (London). Серия из 20 статей, опубликованных с июня 1957 г. по февраль 1959 г.; т. 158–162, Русский перевод: Г. Крон «Исследование сложных систем по частям — диакоптика». — М: Наука, 1972 г. Отдельной книгой опубликовано издательством McDonald (London), 1963.
2. Kron G. Generalized theory of electrical machinery // *Trans. AIEE*, v. 49, № 4, 1930, pp. 666–685.
3. Gabriel Kron and System Theory / Ed. by H.H. Happ. — Union College Press, Schenectady, N.Y., 1973.

4. Kron G. «The Life and Times of Gabriel Kron or Walking Around the World and Tensors», ed. by Philip Alger. — Schenectady: Mohawk Development Service, 1969.
5. Memoirs of Research Association of Applied Geometry, Japan v. I, 1955, v. II, 1958, v. III, 1962; v. IV, 1968.
6. Берендеев А.В. О работах Крона по применению тензорного анализа в электротехнике. // Электричество, 1950, №12.
7. Грузов Л.Н. К статье А.В. Берендеева «О работах Крона» // Электричество, 1951, №3.
8. Максимович Н.Г. К теории преобразования схем Г. Крона // Электричество, 1951, №11.
9. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. — М.: Госэнергоиздат, 1955.
10. Веников В.А., Ионкин П.А., Петров Г.Н., Копылов И.П. Габриэль Крон // Электричество, 1969, №1.
11. Brameller A., John M.N., Scoff M.R. Practical Diakoptics for Electrical Networks. — London, N.Y., 1969.
12. Нарт Н.Н. Diakoptics and Networks — N.Y., London, 1971.
Хэпп Г.Х. Диакоптика и электрические цепи. — М.: Мир, 1974.
13. Lynn J.W. Tensors in electrical engineering. — London: E. Arnold, 1963.
14. Roth J.P. An application of algebraic topology Kron's methods of tearing // Quart. of Appl. Math. 1969, v. XXIII, №2.
15. Kron G. Tensor Analysis of Networks. — N.Y.: John Wiley and Sons, 1939; reprinted: London: McDonald, 1965.
16. Арменский В.А., Кузина И.В. Единая теория электрических машин. — М.: РИО МИЭМ, 1975.
17. Kron G. The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery // General Electric Review, 1935. Перепечатано в форме книги в 1942 г.
18. Journal of Franklin Institute, 1968, v. 286, №6.